calcolati in rapporto a 20 specie di ciascun gruppo di animali. E però queste tavole danno il tanto per 20 dei vari colori per ciascun gruppo di animali. Di questo genere di rappresentazione grafica forse ora si abusa un poco, non essendo questo sempre il modo il più semplice di rendere comprensibili dei fatti che l'osservazione ci fa rimarcare.

« Altre tavole sono destinate ad indicare i rapporti che sotto il riguardo della colorazione hanno i diversi animali. Le ultime sette poi danno esempi o d'animali interi o di parti di essi, che distinguonsi per particolari e memorabili colorazioni. Le figure di queste tavole non possono esser fatte meglio, sia dal lato della linea, sia da quello del colore.

« Da quanto venne finora esposto, non potendo qui entrare in analisi e in discussione di opinioni, la Commissione crede che il lavoro del signor Camerano sia molto pregevole, utile a far conoscere fatti che serviranno a futuri studî e degno quindi della stampa negli Atti dell'Accademia ».

Questa conclusione è approvata, salvo le consuete riserve.

Il Socio Battaglini presenta le seguenti due Note del dott. Giuseppe Veronese.

Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di 2° ordine.

I.

La teoria dei gruppi proiettivi, aperti e chiusi, di punti, rette e piani, in tutte e tre le forme fondamentali fu studiata da Battaglini nelle sue tre Memorie, *Sull'involuzioni dei diversi ordini* (¹), da Clebsch e Gordan (²) e da Lüroth (³). Io do nella presente Nota e nella seguente un saggio delle notevoli applicazioni di questa teoria in quella delle coniche e superficie di 2° grado.

Teorema I. Se si considerano due superficie di 2° ordine e di un punto P si determina il piano polare rispetto alla prima, di questo il polo rispetto alla seconda, di questo il piano polare rispetto alla prima e così di seguito, si ottiene un gruppo di punti $P\, P_1\, P_2 \ldots$ che chiamo (P) e un gruppo di piani $p\, p_1\, p_2 \ldots$ che chiamo (p), i quali non si chiudono qualunque sia il numero di volte, che si ripete la medesima operazione. I due gruppi (P) e (p) sono polari reciproci rispetto alle due superficie. Analogamente essendo date due coniche in un piano.

Teorema II. Se il piano polare di uno dei punti del gruppo (P) passa per un altro punto del gruppo (P), tutti i piani polari dei punti del gruppo (P) conterranno uno ed un solo punto P del gruppo (P). Allora un determinato punto del gruppo cade in una delle due superficie. Gli altri sono due a due coniugati rispetto alle due superficie, in modo però che un punto rispetto alle due superficie ha due punti coniugati distinti. Analogamente nel piano.

Teorema III. Se un punto qualunque Q è situato in un piano p del ciclo (p)

(¹) Atti della r. Accademia di Napoli. Vol. I, II, VII.

(²) Math. Annalen. Vol. I. *Ueber die biternären Formen mit contragredienten Variabeln.*

(³) Math. Annalen. Vol. XI e XIII.

tutti i punti del gruppo (Q) sono situati rispettivamente nei piani del gruppo (p), e viceversa per i gruppi (q) e (P). Analogamente nel piano.

Teorema IV. I punti di un gruppo (P) sono situati in una curva trascendente X ([1]), qualunque punto di questa curva dà luogo ad un gruppo inscritto nella medesima, così ciascuna sua tangente e ciascun suo piano osculatore. Essa ha la medesima sviluppabile polare rispetto alle due superficie. Un punto di essa comune con una delle due superficie (coniche) dà luogo a un gruppo inscritto nella curva, i cui punti sono due a due coniugati rispetto alle due superficie *Teorema II.* La curva X è algebrica in casi speciali. A queste curve X nel piano appartengono tutte le curve d'ordine n dotate di un punto $(n-1)^{plo}$ con $n-1$ tangenti coincidenti e con la singolarità correlativa.

Se la curva tocca una delle due superficie in un punto, essa le toccherà ovunque le incontra, ed avrà per polare reciproca la sua sviluppabile. Analogamente nel piano.

Teorema V. Se il punto P è un punto comune alle due coniche nel piano, oppure è uno dei punti di contatto di una delle tangenti comuni alle due coniche, allora il gruppo corrispondente (P) è reciproco di sè stesso rispetto alle due coniche.

È interessante però lo studio della posizione delle due superficie (coniche) quando il punto P_n cade nel punto P di partenza, ossia quando il gruppo si chiude. Allora lo chiamo ciclo.

Teorema VI. Se è data una superficie di 2° ordine e il punto P_n deve cadere nel punto P, allora vi sono n^3-1 superficie che con la data superficie soddisfanno a tale condizione. Esse hanno lo stesso tetraedro coniugato comune. Per ciascun punto dello spazio si ha un ciclo di n punti. Nel piano invece si hanno n^2-1 coniche che con una data sono in una posizione tale, che il punto P_n cade con P. Esse hanno il medesimo triangolo coniugato comune. Le n^3 superficie e le n^2 coniche formano un sistema che chiamo S.

A questi cicli si applicano i teoremi precedenti.

Teorema VII. Per due delle n^3 superficie dato un punto P si ottiene un ciclo proiettivo di n punti $(P)^n$ e un ciclo proiettivo di n piani polari $(p)^n$, che sono polari reciproci rispetto alle due superficie. Se il punto P è situato in uno spigolo del tetraedro coniugato comune, tutti gli n punti del ciclo $(P)_n$ sono situati nel medesimo spigolo e formano un ciclo proiettivo (di cui i punti doppi sono i vertici del tetraedro coniugato situati nello spigolo), i cui piani polari passano per lo spigolo opposto; oppure se il punto P è situato in un piano del tetraedro fondamentale il ciclo $(P)^n$ è situato nel medesimo piano e i piani del ciclo $(p)^n$ passano per il vertice opposto. Analogamente per le coniche.

Teorema VIII. Se $n = a.b.c...m$ il gruppo di n^3 superficie (coniche) contiene i gruppi di superficie (coniche) corrispondenti ad $n = a, b, ..., m$.

Teorema IX. Se per un certo numero di cicli differenti di n punti rispetto a due delle n^3 superficie si può far passare una sola curva o superficie, essa avrà la stessa sviluppabile o superficie reciproca rispetto alle due superficie. Per ciascun punto di una tale curva o superficie, il ciclo corrispondente è inscritto nella curva o superficie,

(1) Vedi Battaglini e Clebsch l. c.

per ciascun piano tangente o retta tangente il ciclo corrispondente sarà circoscritto alla superficie oppure alla curva. Analogamente nel piano.

Teorema X. Se di un punto P si trova il piano polare rispetto alla prima delle n^3 superficie disposte in un dato ordine, di questo il polo rispetto alla seconda e così di seguito, si ottiene un ciclo di n^3 punti $(P)^{n3}$ e un ciclo di n^3 piani $(p)^{n3}$, i quali sono indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie, e sono polari reciproci rispetto alle medesime. Analogamente per le coniche,

Teorema XI. Se di una superficie del sistema S si trova la polare reciproca rispetto ad un' altra dello stesso sistema si trova una superficie del medesimo sistema. Analogamente per le coniche.

Teorema XII. Se si considera un numero dispari di superficie del sistema e di un punto P si fa l'operazione accennata nel *Teorema X* rispetto a queste superficie disposte in un dato ordine, si ottiene un ciclo di egual numero di punti e di piani polari, i quali cicli però variano mutando l'ordine delle superficie. Analogamente per le coniche.

Teorema XIII. Se per tutti gli n^3 punti di un ciclo o di più cicli si può far passare una sola superficie o curva C, essa avrà rispetto a tutte le n^3 superficie del sistema la medesima polare reciproca. Ciascun punto P della superficie darà luogo ad un ciclo $(P)^{n3}$ inscritto nella stessa, ciascuna sua tangente e ciascun suo piano tangente dà luogo ad un ciclo di n^3 rette o n^3 piani ad essa circoscritto. Analogamente per le coniche.

Teorema XIV. Per un punto della superficie o curva C comune con una delle n^3 superficie (n^2 coniche) si ottiene un ciclo i cui punti sono coniugati due a due rispetto alle superficie (coniche) del sistema S.

Teorema XV. In generale si può dire che le curve nel piano e le superficie dello spazio, le cui equazioni non contengono, che le n^{eme} potenze delle variabili (coordinate di punti o di piani) sono coordinate ad un sistema S di n^2 coniche (n^3 superficie). Per un punto P qualunque o retta tangente o piano tangente p di una di queste curve o superficie, il ciclo corrispondente $(P)^{n3}$ è inscritto in essa, come anche il ciclo $(p)^{n3}$ è circoscritto ad essa.

Teorema XVI. Le n^3 superficie di un sistema S tagliano ciascun spigolo del tetraedro coniugato fondamentale in n coppie di punti. Esse tagliano ciascuna faccia del tetraedro in n^2 coniche, che formano un sistema piano S. In una di queste coniche si toccano n superficie del sistema S.

L' insieme di queste n ultime superficie lo chiamo ennupla di 1ª specie. Nel piano formano un'ennupla di 1ª specie le n coniche di un sistema S, che si toccano in due punti di un lato del triangolo coniugato comune.

Teorema XVII. Ci sono n^2 gruppi di superficie (ennuple di 2ª specie), nei quali le n superficie s' incontrano nei lati di un quadrangolo gobbo, i cui vertici sono situati in due determinati spigoli opposti del tetraedro fondamentale.

Nel piano non si ha il corrispondente.

Teorema XVIII. Se di una superficie di un' ennupla di 1ª o 2ª specie si determina la polare reciproca rispetto ad un' altra della medesima, si ottiene una terza superficie della stessa ennupla.

Prese due superficie di un' ennupla di 1ª o 2ª specie, se della prima si trova la polare reciproca rispetto alla seconda, di questa la polare reciproca rispetto alla prima e così di seguito, si ottengono tutte le n superficie della ennupla. Analogamente per le n^{ple} di 1ª specie nel piano.

Teorema XIX. Se di un punto P si trova il piano polare rispetto alla 1ª delle superficie di un' ennupla di 1ª o 2ª specie, disposte in un dato ordine, di questo il polo rispetto alla 2ª, e così via si ottiene un ciclo $(P)^n$ proiettivo di punti situati in una retta R, a cui corrisponde un ciclo proiettivo $(p)^n$ di piani polari, che s' incontrano in una retta R_1.

I cicli $(P)^n$ e $(p)^n$ sono indipendenti dall'ordine delle n superficie della n^{pla}, e sono polari reciproci rispetto alle medesime.

Se l'ennupla è di 1ª specie la retta R_1 è situata nel piano del tetraedro fondamentale ove si toccano le n superficie di essa, e la retta R passa pel vertice opposto. Se l'ennupla è di 2ª specie allora le due rette RR_1 s'appoggiano ai due spigoli opposti, ove sono situati i vertici del quadrangolo comune alle n superficie della ennupla. Nel 1° caso chiamo le RR_1 *rette di* 1ª *specie* dei cicli $(P)^{n3}$ e $(p)^{n3}$ e nel 2° *rette di* 2ª *specie.*

Teorema XX. Gli n^3 punti di un ciclo $(P)^{n3}$ sono situati n ad n in $3n^2$ rette di 2ª specie. Le n^2 rette di 2ª specie che si appoggiano ad una coppia di spigoli opposti incontrano ciascuno di questi spigoli in n punti, talmentechè per ognuno di questi passano n rette di 2ª specie del ciclo.

Gli n^3 punti del ciclo $(P)^{n3}$ sono situati n ad n in 4 n^2 rette di 1ª specie, che passano n^2 ad n^2 per i vertici del tetraedro fondamentale. Le n^2 rette di 2ª specie che si appoggiano a due spigoli opposti sono situate rispettivamente n ad n in n piani, che passano per l'uno o per l'altro spigolo. Uno di questi piani contiene pure $2n$ rette di 1ª specie, ed in tutto n^2 punti del ciclo $(P)^{n3}$.

Nel piano i punti del ciclo $(P)^{n2}$ sono situati n ad n in 3 n rette di 1ª specie passanti n ad n per i vertici del triangolo coniugato fondamentale.

Teorema XXI. Prese due coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale, gli n^3 punti del ciclo $(P)^{n3}$ si separano in n gruppi O di n^2 punti; gli n^2 punti di un gruppo O sono situati n ad n in $2n$ rette di 2ª specie del ciclo, che si appoggiano rispettivamente alle due coppie di spigoli opposti. Gli n gruppi O sono situati in n iperboloidi, che passano anche per le due coppie di spigoli opposti. Due qualunque degli n gruppi O, formano due figure omologiche in 4 maniere differenti per i 4 vertici del tetraedro fondamentale come centri e le faccie opposte come piani di omologia.

Teorema XXII. Ci sono n^2 gruppi di n superficie (*ennuple di* 3ª *specie*) $(A)^n$ $(B)^n$ $(C)^n$ .... $(N^2)^n$, che non hanno nessuna superficie comune. Le n superficie di una ennupla incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinti. Per queste ennuple vale anche il *Teorema XVIII.*

Nel piano si ottengono con le n^2 coniche di un sistema S n ennuple di 2ª specie, le cui coniche incontrano i lati del triangolo fondamentale in punti distinti, e per le quali vale il teorema analogo al *Teorema XVIII.*

Teorema XXIII. Se di un punto P si trova il piano polare rispetto alla 1ª delle n superficie di un'ennupla $(A)^n$ di 3ª specie disposte in un dato ordine, di questo il polo rispetto alla 2ª e così via si ottiene un ciclo proiettivo di punti $(P_a)^n$ inscritto in una curva algebrica X (Vedi *Teorema IV*), a cui corrisponde un ciclo proiettivo $(p_a{}^n)$, i quali cicli, sono indipendenti dall'ordine delle n superficie della ennupla. Essi sono polari reciproci rispetto alle medesime, come anche la curva X e la sviluppabile inviluppata dai piani di $(p_a)^n$. Il ciclo di n^3 punti $(P)^{n3}$ si decompone rispetto alle n^2 ennuple di 3ª specie $(A)^n$ $(B)^n$ .... $(N^2)^n$ in n^2 cicli proiettivi $(P_a)^n$ $(P_b)^n$ .... $(P_n{}^2)^n$ a cui corrispondono n^2 cicli proiettivi $(p_a)^n$ $(p_b)^n$ .... $(p_n{}^2)$. Un ciclo per es. $(P_a)^n$ ha per polari reciproci rispetto alle n^2 ennuple di 3ª specie i cicli $(p_a)^n$ .... $(p_n{}^2)^n$. Analogamente nel piano.

Casi speciali.

Per lo sviluppo della 2ª Nota m' interessa in particolar modo di considerare i casi $n=2$.

1° Caso $n=2$.

Nel piano si ottengono 4 coniche che Steiner chiama armoniche (harmonische Kegelschnitte) (¹), sono quattro coniche che si ottengono cercando anche le coniche, rispetto alle quali due date sono polari reciproche. Queste coniche sono state studiate da Schröter, da Rosannes e Cremona (²). Nello spazio si hanno 8 superficie di 2° ordine, che risultano anche cercando le superficie rispetto alle quali due dato il 2° ordine sono polari reciproche (³). La ricerca un po' intima di queste superficie mi pare non sia stata fatta da alcuno, del resto ne ho bisogno nella Nota successiva, onde enuncerò i teoremi che più m' interessano e che non sono che corollarî di quelli già enunciati nel caso generale.

Teorema XXIV. Le $8=n^3$ superficie *armoniche* di 2° ordine, che si ottengono per $n=2$ si dividono in due gruppi di 4 superficie. Quelle di un gruppo sono ellissoidi, di quelle del 2° tre sono iperboloidi e una è immaginaria.

Teorema XXV. Le 8 superficie tagliano ciascun spigolo del tetraedro coniugato fondamentale in due coppie di punti, di cui una è immaginaria. Esse tagliano ciascuna faccia del tetraedro in 4 coniche che formano un sistema di 4 coniche armoniche. In una di queste coniche si toccano due superficie del sistema. Vedi *Teorema XVI.*

Teorema XXVI. Ciascuna delle 8 superficie è reciproca di sè stessa rispetto alle altre 7. *Teorema XI.*

Teorema XXVII. Le due superficie di uno stesso gruppo hanno 4 rette in comune, quelle di diversi gruppi si toccano lungo una conica, situata in una faccia del tetraedro coniugato. Ci sono 4 coppie di superficie, che s'incontrano rispettivamente nei lati di un quadrangolo gobbo, che ha i vertici sopra due determinati spigoli opposti del tetraedro coniugato. Vedi *Teorema XVI* e *XVII.*

Teorema XXVIII. Per due superficie di uno stesso gruppo, vi sono infiniti tetraedri coniugati all' una e inscritti e altri circoscritti all'altra. Per due di diversi gruppi ci sono infiniti tetraedri coniugati all' una e i cui spigoli toccano l'altra.

(¹) Vol. 32 Crelle.

(²) Schröter e Steiner'sche Vorlesungen p. 386 e Rosannes, *Inaug. dissertation.* Cremona, *Introduzione alle curve piane.*

(³) Battaglini. Atti della r. Accademia dei Lincei 1872 e D'Ovidio. Giornale di Napoli, vol. X.

Teorema XXIX. Se di un punto P si trova il piano polare rispetto ad una delle 8 superficie, di questo il piano polare rispetto alla prima, si ottiene un ciclo di $n = 2$ punti PP_1 e due piani polari pp_1. La retta R che congiunge P e P_1 (retta d'intersezione de' due piani) se le due superficie appartengono ad un gruppo, si appoggia a due spigoli opposti del tetraedro coniugato fondamentale, se invece le superficie sono di gruppi diversi la prima passa per uno dei vertici e la seconda giace nella faccia opposta del tetraedro coniugato fondamentale. Vedi *Teorema XIX.*

Teorema XXX. Se di un punto P si trova il ciclo corrispondente di 8 punti rispetto alle 8 superficie, e il ciclo degli 8 piani polari corrispondenti, essi formano due figure polari reciproche rispetto alle 8 superficie; gli 8 punti formano due tetraedri, che sono prospettivi in 4 maniere differenti per i vertici del tetraedro fondamentale come centri e le faccie opposte come piani di omologia. Analogamente per gli 8 piani. Vedi *Teorema XXI.*

Questi tetraedri omologici in 4 maniere differenti si studiano nella 2ª Nota.

Teorema XXXI. Uno dei tetraedri degli 8 punti ed uno dei tetraedri degli 8 piani polari sono « iperboloidici » (1) in 4 maniere differenti. I quattro iperboloidi così generati formano un fascio. Ci sono altri 4 iperboloidi che hanno la medesima proprietà e che appartengono al medesimo fascio. Hanno per coniugato il tetraedro fondamentale.

Teorema XXXII. I quattro accennati tetraedri degli 8 punti e degli 8 piani dànno luogo con le intersezioni delle loro faccie ad altri 8 iperboloidi di un fascio, che hanno pure per tetraedro coniugato il fondamentale.

Teorema XXXIII. Uno degli 8 iperboloidi del 1° gruppo, ha per polare reciproco rispetto alle 8 superficie, gli 8 iperboloidi del 2°.

Teorema XXXIV. I lati del tetraedro fondamentale coniugato, vengono tagliati dalle 8 superficie in due coppie di punti, una delle quali immaginaria. La coppia di vertici del lato e le due coppie, hanno la proprietà, che due di esse sono divise armonicamente dalla terza.

Queste coppie di punti formano una figura, che Klein ha studiato nella sua Memoria *Ueber die Liniencomplexe* 1en *u.* 2en *Grades* (2) e perciò è da immaginarsi quanto interesse presenti; essa è il nocciolo delle configurazioni della 2ª Nota.

Teorema XXXV. Tre cicli di 8 punti (P) (Q) (R) sono situati in una superficie di 2° ordine, che ha la medesima polare reciproca rispetto alle 8 superficie. Per qualunque punto di essa o per qualunque sua tangente o piano tangente il ciclo corrispondente è inscritto in essa o è circoscritto ad essa. Vedi *Teorema XIII.*

2° Caso $n = 3$.

Teorema XXXVI. Pel caso $n = 3$ si ottengono nel piano 9 coniche, che si separano in 12 terne, tali che se di una conica di una terna si trova la polare reciproca rispetto ad un' altra della stessa terna si trova la terza della medesima. Una conica

(1) Chiamo iperboloidici due tetraedri quando i loro vertici sono rispettivamente allineati mediante 4 rette situate in un iperboloide. Le faccie si tagliano secondo 4 rette pure di un iperboloide. V. Chasles, *Aperçu historique.*

(2) Vol. II. Math. Annalen.

appartiene a 4 terne. Ci sono 9 terne di coniche di 1ª specie e tre di 2ª. Vedi *Teorema XVI* e *XXII*.

Teorema XXXVII. Per le tre terne di 2ª specie ha luogo la proprietà, che presa una conica di una delle terne, ci sono infiniti triangoli inscritti in essa e circoscritti ad essa che sono coniugati rispetto ad un' altra conica della medesima terna.

Teorema XXXVIII. Se di un punto P si costruisce il ciclo $(P)^9$ rispetto alle 9 coniche esso si compone di 9 punti; abbiamo il ciclo polare $(p)^9$ di 9 rette, reciproco del primo rispetto a tutte le 9 coniche. I 9 punti sono situati tre a tre in tre rette passanti per ciascuno dei vertici del triangolo coniugato comune. Vedi *Teorema X* e *XX*. Analogamente per le rette $(p)^9$.

Teorema XXXIX. Rispetto a due delle 9 coniche, abbiamo per ogni punto un ciclo di tre punti situati in una retta, se le due coniche appartengono ad una terna di 1ª specie. Se esse appartengono ad una terna di 2ª specie e si considera uno dei loro punti d'incontro, il ciclo corrispondente forma un triangolo che è reciproco di sè medesimo rispetto alle 2 coniche. Vedi *Teorema V.* Non è però il triangolo coniugato comune.

Teorema XL. I 9 punti (P) di un ciclo siano 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sono situati tre a tre secondo il *Teorema XXXVI* in tre rette passanti per ciascuno dei vertici del triangolo coniugato comune, cioè 123, 456, 789; 369, 147, 258; 348, 267, 159; le altre tre terne $(P_a)^3 = 168$, $(P_b)^3 = 249$, $(P_c)^3 = 357$, sono inscritte ciascuna in tre coniche, che toccano rispettivamente due lati del triangolo coniugato comune nei due vertici del terzo lato.

Osservo che per i flessi di una curva del 3° ordine le terne 168, 249, 357 sono situati anche in tre rette.

Teorema XLI. Le 9 coniche del sistema si separano in tre terne (A) (B) (C) di 2ª specie rispetto alle quali il ciclo di 9 punti $(P)^9$ si separa pure nelle tre terne $(P_a)^3$, $(P_b)^3$, $(P_c)^3$ e le rette polari nei cicli $(p_a)^3$, $(p_b)^3$, $(p_c)^3$. $(P_a)^3$ ha per reciproci rispetto ad (A) (B) (C) i gruppi $(p_a)^3$, $(p_b)^3$, $(p_c)^3$; $(P_b)^3$ invece $(p_b)^3$, $(p_c)^3$, $(p_a)^3$ e $(P_c)^3$ finalmente $(p_c)^3$, $(p_a)^3$, $(p_b)^3$. Vedi *Teorema XXIII.*

Teorema XLII. Se il punto P è in uno dei lati del triangolo coniugato comune, allora $(P_a)^3$, $(P_b)^3$, $(P_c)^3$ coincidono in un solo ciclo $(P_a)^3$, che ha perciò il medesimo ciclo $(p_a)^3$ per polare reciproco rispetto alle 9 coniche.

Teorema XLIII. Un ciclo del teorema precedente e due terne $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$ appartenenti a due punti P e Q sono in una curva del 3° ordine, avente nel 1° ciclo tre dei suoi flessi, per la quale il triangolo fondamentale è uno dei suoi trilateri di punti d'inflessione.

Teorema XLIV. Uno dei cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ e uno dei cicli $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ formano due triangoli omologici in tre maniere differenti.

Applicazione alla curva del 3° ordine.

Teorema XLV. Presa una curva del 3° ordine C^3 qualunque, ci sono tre terne (A) (B) (C) di coniche, rispetto alle quali la curva è nelle condizioni del *Teorema XLIII.* Le terne (A) (B) (C) formano il sistema di 9 coniche precedentemente studiato. Il triangolo fondamentale è uno dei trilateri della curva, perciò per ogni suo trilatero otteniamo un sistema di 9 coniche, ossia in tutto 36 coniche.

Teorema XLVI. Le 9 coniche di un sistema si separano in tre terne (A) (B) (C); rispetto alle quali il ciclo di un punto P si separa in tre terne $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ (*Teorema XL*). Se il punto P di $(P_a)^3$ cade sulla curva C^3, allora il ciclo $(P_a)^3$ è inscritto nella curva (*Teorema XLI, LX*). Così se la retta p di $(p_a)^3$ è tangente alla curva, il ciclo $(p_a)^3$ è circoscritto alla curva.

Teorema XLVII. Se per un punto comune della C^3 con una delle coniche della terna (A) si costruisce il ciclo $(P_a)^3$, esso è inscritto in C^3 e i tre punti formano tre coppie di punti coniugati rispetto alle 3 coniche della terna (A). Gli altri due punti del ciclo $(P_a)^3$ sono situati rispettivamente sulle altre due coniche della terna (A). Vedi *Teoremi II, XXII* e *XVIII.*

Teorema XLVIII. La curva C^3 ha rispetto alle tre terne (A) (B) (C) tre curve polari reciproche, che avranno rispetto ad (A) (B) (C) le analoghe proprietà. Per un flesso di C^3 i tre gruppi $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ coincidono (*Teorema XLII*) nei tre flessi del lato del triangolo fondamentale, essi hanno rispetto alle terne (A) (B) (C) il ciclo $(p_a)^3=(p_b)^3=(p_c)^3$ come reciproco, onde le curve polari di C^3 toccano tutte e 9 le rette armoniche dei flessi.

Teorema XLIX. La figura dei 9 flessi e delle 9 rette armoniche sono polari reciproche rispetto ai 4 sistemi di 9 coniche relativi ai 4 trilateri (¹).

Teorema L. Per il trilatero reale le 9 coniche sono immaginarie, per due altri sono pure immaginarie, per il quarto una delle terne (A) (B) (C) è reale e le coniche di essa toccano rispettivamente due lati del trilatero reale nei vertici del terzo lato.

Teorema LI. In un fascio sizigetico ci sono due cubiche, per le quali dato un punto P in esse, due delle tre terne $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ sono inscritte in esse. Questo rispetto ad un trilatero, dunque nel fascio ci sono 8 di queste cubiche.

Teorema LII. Per la curva del 3° ordine equianarmonica dato un punto P o retta tangente q di essa, i cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(F_c)^3$ sono inscritti in essa e i cicli $(q_a)^3$ $(q_b)^3$ $(q_c)^3$ sono circoscritti ad essa. Vedi *Teorema XV.* Essa ha una sola polare reciproca rispetto alle 9 coniche del sistema, la quale è una curva equianarmonica di 3ª classe.

In altra occasione presenterò questo lavoro completato con le dimostrazioni, nel quale intendo di sviluppare un po' più questa teoria, che mi pare alquanto importante.

II.

Nella nota Iª abbiamo visto che per $n=2$ il ciclo di 8 punti (P) corrispondente alle 8 superficie del gruppo, formano due tetraedri omologici in quattro maniere differenti rispetto ai vertici del tetraedro coniugato delle 8 superficie. Di questi tetraedri se n'è occupato *Hermes* (²), considerando un esaedro, le cui diagonali s'incontrano in un punto. A questa figura fui veramente indotto già da molto tempo

(¹) Queste coniche furono anche considerate recentemente per altra via dal prof. Battaglini in una sua Nota, che fa parte di un volume, che si sta pubblicando in onore del Chelini.

(²) Vol. 56 Crelle.

dal teorema IV che io diedi nella mia Memoria sull' *Hexagrammum mysticum* [1] il quale dimostra, che se i due triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ sono omologici per un centro D^3; i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$ $A_1 C_2 . A_2 C_1 \equiv B_3$, $B_1 C_2 . C_1 B_2 \equiv A_3$ formano un triangolo omologico ai due primi per i centri $D_2 D_1$, i quali sono situati in linea retta con D_3. Mentre stavo pubblicando questo lavoro, ho veduto che il sig. Cyparissos ha studiato la figura formata da questi tetraedri nell' ultimo fascicolo del *Bullettin des sciences mathématiques*. Le mie ricerche si spingono molto più oltre di quelle del sig. Cyparissos, e inoltre hanno uno stretto legame con la I^a Nota. Prima di passare a questi tetraedri premetterò 4 teoremi, che corrispondono a quelli, che ho dato in principio del mio lavoro sull'*Hexagrammum*.

Teorema I. Dati tre triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ omologici per il medesimo centro e situati in piani differenti, si possono formare coi 9 punti $A_1 B_2 \dots C_3$ 27 triangoli, con questi 36 terne di triangoli non aventi nessun vertice comune, i cui tre assi di omologia s'incontrano in un punto y; questi 36 punti sono situati 4 a 4 in 27 rette x, che corrispondono ai 27 triangoli. I quattro punti y che stanno in una retta x, corrispondono a quelle quattro terne di triangoli, che hanno un triangolo comune.

Teorema II. Se si considerano tre tetraedri $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$, $A_3 B_3 C_3 D_3$ omologici per il medesimo centro O, tenendo fisso uno di essi per es. $A_1 B_1 C_1 D_1$, con gli altri due si formano le coppie di triangoli $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ ecc. Con i 6 punti A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3 si formano altre tre coppie di triangoli, che col triangolo A_1 B_1 C_1 determinano 4 punti y di una retta x. Per i 4 triangoli del 1° tetraedro si hanno 4 rette x situate in un piano E. Di questi piani ce ne sono 81; le rette x sono 108, per una di esse passano 3 piani E.

Teorema III. Se tenendo fisso uno dei tetraedri del teorema precedente, si formano con gli altri due le 8 coppie possibili di tetraedri, non aventi nessun vertice comune, ciascuna di queste coppie col tetraedro fisso determina, coi 3 piani di omologia dei tre tetraedri due a due, una retta s; le 8 rette s che corrispondono alle 8 coppie e per ciò al tetraedro primitivo sono situate in un piano E, che corrisponde in tal modo al 1° tetraedro. Le 8 rette in un piano E formano due quadrilateri, i cui lati due a due s' incontrano nelle 4 rette x del piano E nei punti y. Per un punto y passano 6 rette s, e 9 piani E che congiungono due di quelle rette s. I punti y sono 144, sono situati 16 a 16 negli 81 piani E. Per una retta s passano tre piani E [2].

Teorema IV. Se il tetraedro $A_1 B_1 C_1 D_1$ è omologico col tetraedro $A_2 B_2 C_2 D_2$ questo col tetraedro $A_3 B_3 C_3 D_3$, questo col tetraedro $A_4 B_4 C_4 D_4$ e finalmente quest'ultimo col 1°, e i 4 centri sono in linea retta, i quattro piani di omologia s' incontrano in una retta.

Tetraedri fasciali.

Teorema V. Se si hanno tre triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, situati in piani differenti ed omologici pel centro C_4, i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 B_3 . A_3 B_1 \equiv C_2$, $A_2 B_3 . A_3 B_2 \equiv C_1$ dànno un altro triangolo omologico coi due primi per i centri

[1] Atti della r. Accademia dei Lincei 1877.

[2] Vedi *Teorema LXVIII.*

A_4 B_4: i tre centri A_4 B_4 C_4 stanno in una retta h e i tre piani A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3 s'incontrano in una retta h' (1). Due dei tre tetraedri $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, $C_1 C_2 C_3 C_4$ sono perciò omologici per ciascun vertice e piano opposto del terzo come centro e piano di omologia. I loro vertici sono tre a tre situati in 16 rette h, e le loro faccie s'incontrano tre a tre in 16 rette h'.

Teorema VI. Se uno dei tetraedri $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$; $C_1 C_2 C_3 C_4$ si piglia come tetraedro di riferimento, i vertici dei due altri tetraedri hanno rispetto ad esso le medesime coordinate; i vertici di un tetraedro hanno le medesime coordinate con due segni cambiati.

Proiettando dagli spigoli del tetraedro $(A) = A_1 A_2 A_3 A_4$ il punto B_1 sugli spigoli opposti, ottengo 6 punti P_{ik}, tali che P_{12} per es. è situato in $A_1 A_2$. Di questi 6 punti trovando i coniugati armonici rispetto ai vertici del tetraedro (A) si ottengono altri 6 punti P'_{ik}, che sono situati in un piano, che contiene gli altri tre punti $B_2 B_3 B_4$, e che chiamo piano *polare* del punto B_1 rispetto al tetraedro.

Teorema VII. Le faccie di uno dei tre tetraedri, sono i piani polari dei vertici rispetto agli altri due.

Chiamo una tale terna, *terna di tetraedri fasciali*, due tetraedri che formano con un terzo una tale terna li chiamo *complementari.*

Teorema VIII. I 18 spigoli dei tre tetraedri (A) (B) (C) s'incontrano tre a tre nei 12 punti P_{ik} e P'_{ik}. Questi sono situati 3 a 3 in 12 piani π_{ik} π'_{ik}, che formano la figura correlativa di P_{ik} P'_{ik}, passano due a due per ognuno dei 18 spigoli, formando un gruppo armonico con le due faccie, che s' incontrano in quello spigolo. Per ciascun punto P_{ik} o P'_{ik} passano 4 rette h', mentre nei piani π_{ik} o π'_{ik} ci sono 4 rette h e 3 spigoli appartenenti ad (A) (B) (C). I piani π_{ik} π'_{ik} sono quelli che proiettano per es. dagli spigoli del tetraedro (A) i vertici degli altri due (B) e (C) (2).

Per ogni punto dello spazio otteniamo rispetto ad un tetraedro fondamentale (A) un tetraedro fasciale, analogamente per un piano; se il piano è quello all' infinito, il tetraedro che gli corrisponde si può chiamare *centrale.* Gli spigoli di tutti questi tetraedri si appoggiano sugli spigoli opposti del tetraedro fondamentale. I vertici di un tetraedro fasciale col dato, sono due a due coniugati rispetto alle tre involuzioni di 2a specie determinate dalle coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. I vertici invece dei tetraedri (B) e (C), sono due a due coniugati nelle 4 involuzioni di 1a specie determinate, dai vertici e dalle faccie opposte del tetraedro fondamentale. Se un punto si muove sopra una retta il piano polare, inviluppa una sviluppabile di 3a classe, che tocca le faccie del tetraedro fondamentale; ad un piano corrisponde una superficie di 3a classe e 4° ordine. Se il punto si muove in una retta, passante per uno dei vertici, del tetraedro (A) il piano polare si muove pure, intorno ad una retta passante per il medesimo vertice. Se il punto si muove in una retta, che si appoggia a due spigoli opposti, il piano si muove intorno ad una retta, che si appoggia pure ai due spigoli opposti. Queste due rette e i vertici sugli spigoli formano un gruppo armonico. Se il punto si muove in uno spigolo, del tetraedro fondamentale, il piano polare

(1) Vedi *Teorema IV. Hexag. mysticum.*

(2) Vedi *Teor. XXI* della Ia Nota.

rimane indeterminato, se il punto si muove in una retta, che incontra uno spigolo, allora il piano polare inviluppa un cono, avente il centro sullo spigolo opposto. Analogamente considerando un piano.

Teorema IX. Se nella retta h, per es. $A_4\ B_4\ C_4$, di ciascuno dei 3 vertici si determina il 4° armonico rispetto agli altri due, si ottengono i tre punti $A'_4\ B'_4\ C'_4$ d'incontro con le faccie opposte ad $A_4\ B_4\ C_4$ nei tetraedri (A) (B) (C). In ogni retta h, ci sono due punti immaginarî E, che sono i punti doppî dell'involuzione $A_4\ B_4\ C_4$, $A'_4\ B'_4\ C'_4$. Analogamente se dei tre piani dei tre tetraedri, che s'incontrano in una retta h' si determinano i piani coniugati armonici rispetto agli altri due, si ottengono tre coppie di piani in involuzione, i cui piani immaginarî doppî passano per i punti E situati sulla retta h, che congiunge i tre vertici opposti a quei tre piani nei tre tetraedri. Le 16 rette h ed h' si corrispondono così due a due.

Teorema X. I 12 punti $P_{ik}\ P'_{ik}$ formano alla lor volta 3 tetraedri fasciali cioè $P_{12}\ P'_{12}\ P_{34}\ P'_{34}$ ecc. i piani opposti sono i piani π_{ik} e π'_{ik} cioè $\pi_{12}\ \pi'_{12}\ \pi_{34}\ \pi'_{34}$ ecc. Mentre i tre punti P'_{ik} sono situati nel piano $B_2\ B_3\ B_4$ (*Teorema V*) i piani π_{ik} s'incontrano nel punto B_1. Le rette che congiungono tre a tre i 12 vertici $P_{ik}\ P'_{ik}$ sono le 16 rette h', mentre le faccie corrispondenti $\pi_{ik}\ \pi'_{ik}$ s'incontrano tre a tre nelle 16 rette h. Questa seconda terna di tetraedri la chiamo complementare alla prima, tutte e due formano *una sestupla di tetraedri fondamentali.*

Teorema XI. I 18 spigoli dei tetraedri della 2ª terna sono gli stessi di quelli della 1ª, con essi si formano 9 coppie, le quali si dispongono in 6 terne di coppie, nelle quali terne gli spigoli delle tre coppie non hanno nessun punto comune. Essi s'incontrano solamente nei punti $P_{ik}\ P'_{ik}$, e sono situati due a due solamente nei 12 piani $\pi_{ik}\ \pi'_{ki}$.

Teorema XII. Le 12 rette h, che passano per tre dei vertici del tetraedro per es. (A) sono spigoli di un esaedro, le cui diagonali sono le altre rette h. Onde in tutto per i tetraedri della 1ª terna sono 12 esaedri. Questi hanno per tetraedri diagonali i tre tetraedri della 1ª terna. Analogamente per i tetraedri della 2ª terna.

Teorema XIII. Coi 12 vertici dei tetraedri (A) (B) (C) e dei tre della 2ª terna si formano 32 terne, di tetraedri, che si separano in due gruppi di 16. In ciascuna delle 16 terne, corrispondenti per es. alla terna (A) (B) (C) c'entrano 9 vertici di questi tetraedri e 3 vertici della 2ª terna, che stanno in linea retta.

Teorema XIV. Il sistema dei centri di similitudine di 4 sfere formano un identico sistema di punti P_{ik} e P'_{ik}, P_{ik} sono i centri interni e P'_{ik} sono i centri esterni. I centri $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ sono i centri delle 4 sfere, come possono esserlo anche i vertici dei tetraedri $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$, $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$. Egualmente i punti P_{ik} e P'_{ik} possono alla lor volta esser considerati, come centri di 12 sfere, il sistema di centri di similitudine sono allora i vertici dei tetraedri della 1ª terna. Dato un sistema di centri di similitudine ci sono 4 gruppi di 4 sfere, che hanno quel sistema in comune.

Teorema XV. Due tetraedri fasciali (B) e (B_1) con un tetraedro dato (A), ma non complementari, sono iperboloidici in 4 maniere differenti. I 4 iperboloidi così ottenuti formano un fascio e hanno il tetraedro fondamentale come coniugato. I due tetraedri (C) (C_1) complementari ai primi dànno luogo ai medesimi 4 iperboloidi. Considerando le coppie (C) (B_1) e (C_1) (B) si ottengono altri 4 iperboloidi che appartengono al medesimo fascio. Analogamente avviene per le faccie dei 4 tetraedri (Vedi Nota I nel caso $n = 2$ *Teorema XXXI*).

Teorema XVI. In una superficie di 2° ordine dato un tetraedro qualunque ad essa inscritto, c'è sempre un tetraedro ed uno solo che è fasciale col dato ed inscritto pure nella superficie. Il tetraedro fasciale complementare è un tetraedro coniugato rispetto alla superficie.

Teorema XVII. Dunque consideriamo nei vertici del tetraedro inscritto i piani tangenti, questi formano un tetraedro fasciale col tetraedro coniugato, perciò il tetraedro dei 4 punti di una superficie di 2° ordine e il tetraedro formato dai 4 piani tangenti, sono iperboloidici in 4 maniere differenti. *Teorema XVI* (1).

Teorema XVIII. Data una superficie di 2° grado e un tetraedro qualunque, ci sono 8 punti, i quali hanno i medesimi piani polari rispetto alla superficie e rispetto al tetraedro. Nel caso che il tetraedro sia coniugato alla superficie, allora gli 8 punti formano due tetraedri coniugati, omologici in 4 maniere differenti per i vertici e le faccie opposte del tetraedro coniugato fondamentale e formano con esso una terna di tetraedri fasciali. I tetraedri della 2ª terna sono anche coniugati rispetto alla superficie di 2° grado. Ogni tetraedro dà luogo rispetto ad una superficie di 2° grado ad una sola sestupla di tetraedri coniugati; se la superficie è reale, allora 5 di essi sono immaginarî, se invece è immaginaria, se il primo è reale, son tutti 6 reali.

Teorema XIX. Se di un tetraedro fasciale con un tetraedro coniugato rispetto ad una superficie di 2° grado, si costruisce il tetraedro polare reciproco rispetto alla superficie si ottiene un tetraedro pure fasciale col coniugato, onde due tali tetraedri polari reciproci rispetto alla superficie di 2° grado e fasciali con uno dei suoi tetraedri coniugati, sono iperboloidici in 4 maniere differenti (2). Vedi *Teorema XVI.*

Teorema XX. Sopra uno dei 18 spigoli reali di una sestupla di tetraedri fasciali, ci sono due punti immaginarî P^{i}_{ik} che dividono armonicamente la coppia di punti P_{ik} P'_{ik} e la coppia dei vertici dei primi tre tetraedri (A) (B) (C) situati su di esso. In tutto sono 18 coppie, sono situati 6 a 6 in 6 coppie di rette immaginarie I, che s'appoggiano a tre coppie di spigoli appartenenti rispettivamente ai tre tetraedri di una qualunque delle terne della sestupla.

Teorema XXI. Le 6 coppie di rette immaginarie I sono situate in una superficie di 2° ordine S, la quale taglia le rette h ed h', nei loro punti E E', ed ha ivi per piani tangenti i piani e e'; gli spigoli delle 9 coppie di spigoli opposti e le 32 rette delle 16 coppie di rette hh' corrispondenti secondo il *Teorema X*, sono coniugate rispetto alla superficie S. La S è immaginaria, essa ha per tetraedri coniugati, i 6 tetraedri della sestupla (*Teorema XIX*). Vedi Nota I pel caso $n=2$ *Teorema XXIV.*

Queste proprietà valgono per qualunque superficie del 2° ordine, un suo tetraedro coniugato secondo il *Teorema XIX* dà luogo ad una tale sestupla di tetraedri.

(1) Chasles nell'*Aperçu historique* dimostra che sono iperboloidici in una sola maniera, vale a dire che i vertici del tetraedro inscritto e i punti d'incontro dei piani tangenti negli altri tre, sono situati in 4 rette di un iperboloide.

(2) Chasles nell'*Aperçu historique*, *sur le théorème analogue de Pascal et Brianchon dans l'espace*, dimostra che due tetraedri polari reciproci qualunque sono iperboloidici; qui dunque si vede che ve ne sono di quelli iperboloidici in 4 maniere differenti.

Teorema XXII. Per due coppie di spigoli opposti di uno dei tetraedri di una terna per es. del tetraedro (A) e per due coppie di spigoli opposti di (B) passa una superficie del 2° ordine S_1, che ha il terzo tetraedro (C) come coniugato. Essa passa anche per due coppie di spigoli opposti di due tetraedri della 2ª terna (sono gli stessi dei primi) e ha il terzo tetraedro della 2ª terna come coniugato. Questa passa pure per due delle coppie di rette immaginarie I, che congiungono due a due i punti immaginarî P^i_{ik} situati sulle coppie di spigoli, per le quali essa passa. (Vedi *Teorema XXI* della Iª Nota).

Teorema XXIII. Per le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro della sestupla per es. (A) si ottengono 6 di tali superficie $S_1 S_2 S_3$, $S_4 S_5 S_6$ in modo che $S_1 S_4$, $S_2 S_5$, $S_3 S_6$ s'incontrano in due coppie di spigoli opposti del tetraedro (A). Gli altri due tetraedri (B) e (C) dànno luogo ad altre tre superficie $S_7 S_8 S_9$, che hanno il tetraedro (A) come coniugato. Una qualunque delle 9 superficie ha due dei tetraedri fondamentali come coniugati e passa per 4 rette immaginarie I.

Teorema XXIV. Le due coppie di spigoli di due tetraedri di una terna situata in una delle 9 superficie e che non s'incontrano, formano un gruppo armonico.

Teorema XXV. Le 4 delle 10 superficie S $S_1 \ldots. S_9$ che sono coniugate rispetto ad uno dei tetraedri della sestupla formano uno dei gruppi di superficie armoniche corrispondenti al caso $n=2$ (Vedi Nota Iª *Teorema XXIV*).

Teorema XXVI. Con i 18 spigoli dei tetraedri della sestupla fondamentale e con le 6 coppie di rette I, si formano 10 sestuple di tetraedri fasciali F. I tetraedri F sono in tutto 15 (¹). Rispetto alle altre 9 sestuple, la S si scambia con una delle altre 9.

Teorema XXVII. Congiungendo la coppia dei punti immaginarî P^i_{ik} di uno spigolo con la coppia di punti reali P_{ik} dello spigolo opposto si ha un tetraedro N, di cui due spigoli sono reali; di questi tetraedri ce ne sono 4 per ogni coppia di spigoli opposti, ossia per una sestupla sono 36. In tutto il sistema sono 60.

Teorema XXVIII. Rispetto ai tetraedri della sestupla fondamentale le 9 superficie $S_1, .. S_9$, formano 6 gruppi di superficie armoniche ai quali appartiene anche la S.

Teorema XXIX. Ci sono rispetto ai 6 tetraedri fondamentali 6 gruppi di superficie armoniche complementari ai 6 dati, che sono costituiti ciascuno da 4 ellissoidi reali. (Vedi Nota Iª $n=2$). In tutto il sistema si ottengono 15 gruppi complementari ai 15 gruppi formati dalle 10 superficie S $S_1 \ldots S_9$ cioè 60 ellissoidi.

Teorema XXX. Uno dei 4 ellissoidi che si riferiscono ad uno dei 6 tetraedri fondamentali p. es. (A) incontra tre spigoli incontrantesi in un vertice in tre coppie di punti P_{ik} reali, e i rimanenti nei loro punti P^i_{ik} immaginarî. Esso contiene perciò 12 degli spigoli immaginarî di tre dei tetraedri N. I 4 ellissoidi di un gruppo, che si riferisce ad un tetraedro, hanno due a due in comune 4 spigoli di un tetraedro N.

Gli ellissoidi che si riferiscono ai tetraedri di una terna dirò che formano una *bisestupla,* la quale si compone di tre gruppi, che si riferiscono ai tetraedri della terna. Chiamo 1ª bisestupla quella che si riferisce ai tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C) e 2ª bisestupla quella che si riferisce alla terna di tetraedri di punti P_{ik}. Ritornerò più avanti sopra queste superficie.

(¹) Vedi Klein, *Ueber die Complexe 1 u. 2 Grades.* Vol. II. Math. Annalen.

Teorema XXXI. Le 16 rette h si dispongono in 8 gruppi α di 4 rette, che non s' incontrano e che passano rispettivamente per i 12 vertici dei tre tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C). Analogamente per le rette h'.

Teorema XXXII. Ogni retta h entra in due gruppi α, le 6 rette h che con essa entrano nei due gruppi α, sono situate in un iperboloide H, s' incontrano due a due nei 9 vertici dei tetraedri (A) (B) (C) (eccettuati quelli di h); quivi l'iperboloide ha per piani tangenti 9 piani π_{ik}, che contengono due a due le 6 rette h. Ci sono 16 iperboloidi H e 16 iperboloidi H′, che corrispondono alle 16 rette h ed h'. Alle 4 rette h di un gruppo α corrispondono 4 iperboloidi H, che formano un gruppo α.

Teorema XXXIII. Uno qualunque degli iperboloidi H incontra i 6 iperboloidi H che formano con esso due gruppi α, in due rette h che non s'incontrano, mentre incontra gli altri 9, in due rette h che s' incontrano. Vedremo subito quali sono le ulteriori intersezioni.

Teorema XXXIV. Ciascun gruppo α di rette h, ammette due trasversali h_0, che incontrano le rette h del gruppo. Queste passano per i punti immaginarî E del *Teorema X* situati su quelle rette h. Queste rette s' appoggiano anche al gruppo α' di rette h' corrispondenti; le rette h_0 sono situate sulla superficie S. Esse sono 16, ciascuna si appoggia a 4 rette h e a quattro rette h'.

Teorema XXXV. Le rette h_0 si scindono in due gruppi di 8 rette, due qualunque di un gruppo non s' incontrano, mentre s' incontrano quelle di gruppi diversi.

Teorema XXXVI. Le rette h_0 sono situate 4 a 4 nei 16 iperboloidi H ed H′. Due iperboloidi qualunque H s' incontrano in due rette h e in due rette h_0. Analogamente per gl' iperboloidi H′.

Teorema XXXVII. Le 6 rette h situate in un iperboloide H si separano in due gruppi di rette che non s' incontrano, mentre poi quelle di diversi gruppi s' incontrano; le rette h di uno di questi gruppi e le rette h_0 che s'appoggiano all'altro formano un gruppo equianarmonico.

Teorema XXXVIII. Se un piano passa per una delle rette h, esso incontra altre 9 rette h nei vertici dei tre tetraedri della 1ª terna situati in h, incontra le altre 6 in 6 punti di una conica.

Teorema XXXIX. Se il piano passa per una delle rette h_0, incontra le 12 rette h che non la incontrano in 12 punti situati 3 a 3 in 4 rette e che appartengono ad una curva del 3° ordine.

Teorema XL. Se passa per due delle rette h_0, che s'incontrano in un punto E di una delle rette h, esso incontra le 9 rette h, che non incontrano quelle due rette ho in 9 punti, base di un fascio di curve di 3° ordine. Considereremo in fine della Nota la sezione piana con un piano qualunque.

Teorema XLI. Se di un punto P si costruisce il tetraedro fasciale, al quale il punto P appartiene, rispetto ad uno del tetraedri della sestupla per es. (A) e dei vertici di questo tetraedro costruiamo i coniugati nelle involuzioni di 2ª specie date dalle 3 coppie di spigoli opposti del tetraedro (A), si ottengono 12 punti che formano 3 tetraedri fasciali con (A). Se di uno qualunque di questi tre, si fa la stessa operazione rispetto ad (A) si ottengono gli altri due e il 1° appartenente a P. I 16 vertici dei 4 tetraedri fasciali rispetto ad (A) formano una configurazione K chiusa, tale cioè che se di un punto di essa si trovano i 9 coniugati, nelle involuzioni di 2ª specie date dalle 9 coppie di spigoli opposti, e di questi 9 si fa la stessa operazione si ottengono sempre gli stessi 16 punti. Dato un tetraedro della sestupla i 16 punti si separano in 4 tetraedri fasciali rispetto ad esso.

Teorema XLII. Se di un punto P si trovano i 9 coniugati nelle involuzioni stabilite dalle 9 coppie di spigoli opposti, 3 a 3 sono situati nei piani polari di esso rispetto ai 6 tetraedri della sestupla e 4 a 4 nei suoi piani polari rispetto alle 9 superficie $S_1 \dots S_9$. Gli altri 6 punti del gruppo K sono situati nel piano polare di P rispetto alla superficie S. Per due degli ultimi sei punti passano rispettivamente i piani polari del punto P rispetto alle 9 superficie $S_1 \dots S_9$. La configurazione K è una configurazione di Kummer.

Teorema XLIII. La configurazione K, ha la medesima proprietà rispetto a tutte le 10 sestuple, che si formano coi 15 tetraedri F.

Teorema XLIV. Se del punto P si trovano anche i coniugati nelle involuzioni di 1ª specie determinate dai vertici e dalle faccie opposte dei tetraedri della 1ª terna, e lo stesso si fa coi nuovi punti ottenuti si ottiene un ciclo V di 96 punti, che si compone di 6 configurazioni K.

Teorema XLV. I 96 punti di un ciclo V sono situati 6 a 6 in 16 piani O passanti per una qualunque delle 16 rette h. In questi piani i 6 punti sono situati in una conica, e formano due triangoli omologici in tre maniere differenti per i vertici situati sulla retta h. La conica passa per i due punti E della retta h.

Teorema XLVI. Se il punto P cade in una delle rette h, allora i 96 punti sono situati 6 a 6 sulle 16 rette h; se è un punto di una delle rette h', allora il gruppo V si riduce a 16 punti.

Teorema XLVII. Se di un punto P, si costruiscono i coniugati rispetto alle involuzioni di 2ª specie, date dalle 9 coppie di spigoli dei tetraedri della sestupla e nelle involuzioni di 1ª specie date dai vertici e dai rispettivi piani opposti di essi, e così si fa la stessa operazione coi nuovi punti ottenuti, si ottiene un ciclo Z, di 576 punti, che contiene 36 configurazioni K, le quali formano 6 sistemi V rispetto ai tre tetraedri di una terna e 6 altri rispetto all' altra terna.

Teorema XLVIII. Se un punto o retta è situato sulla superficie S, il ciclo corrispondente Z è situato sulla superficie. Analogamente per un piano tangente alla superficie S si ottiene un ciclo Z circoscritto alla superficie. Per ogni tetraedro coniugato di essa otteniamo un aggruppamento simile di punti, di rette e di piani della superficie. Chiamo punto coniugato di un punto rispetto ad un tetraedro il punto, che ha le coordinate inverse del dato rispetto al tetraedro, considerato come tetraedro di riferimento; analogamente per un piano.

Teorema XLIX. I piani polari dei punti di una configurazione K rispetto ad uno dei tetraedri della sestupla, costituiscono la configurazione K, formata coi punti coniugati dei 16 punti della prima rispetto a quel tetraedro.

Abbiamo visto esservi 24 ellissoidi per la sestupla reale di tetraedri della 1ª e 2ª, terna e anzi li abbiamo divisi in due bisestuple 1ª e 2ª; ciascuna bisestupla si divide in tre gruppi corrispondenti ai tre tetraedri della terna.

Teorema L. Gli ellissoidi appartenenti ad un gruppo della 1ª bisestupla per es.

ad (A) toccano gli spigoli degli altri due tetraedri (B) (C) della stessa terna nei punti reali P_{ik} P'_{ik}. Analogamente per la seconda bisestupla.

Teorema LI. Gli ellissoidi della 2^a bisestupla toccano due faccie di un tetraedro qualunque della 1^a terna e tagliano le altre due faccie in due coniche, che toccano due degli spigoli, nei punti d' incontro di essi con lo spigolo opposto a quello d'incontro delle due prime faccie. E viceversa.

Teorema LII. Un ellissoide della $1^a(2^a)$ bisestupla è reciproco di sè stesso rispetto a 6 ellissoidi della 2^a (1^a). Ci sono per il primo ellissoide e per uno di questi 6 infiniti tetraedri coniugati all'uno inscritti e circoscritti all' altro.

Teorema LIII. Per due degli ellissoidi di diversi gruppi di una medesima bisestupla ci sono infiniti tetraedri coniugati all'uno e inscritti e circoscritti all'altro.

Teorema LIV. Se nell' ellissoide di uno dei 6 gruppi delle due bisestuple, si considera un punto, il ciclo K ad esso corrispondente, si compone di 4 tetraedri fasciali col tetraedro del gruppo che si considera e che sono inscritti rispettivamente nei 4 ellissoidi del gruppo.

Teorema LV. Se un punto è situato in una delle 9 superficie $S_1 \ldots. S_9$ la configurazione K a cui dà luogo, è inscritta in esse.

Teorema LVI. Se di un punto rispetto ad una terna di tetraedri fondamentali si costruisce il ciclo V corrispondente, esso è reciproco di sè stesso non solo rispetto alle 10 superficie $S \ldots S_9$, ma bensì anche rispetto ai 12 ellissoidi della bisestupla, che corrisponde a quella terna di tetraedri fondamentali.

Teorema LVII. Il ciclo Z è reciproco di sè stesso rispetto a tutto le 34 superficie di 2° grado che si riferiscono alla sestupla di tretraedri reali, cioè ai 24 ellissoidi e alle 10 superficie $S \ldots. S_9$.

Teorema LVIII. La superficie S è reciproca di sè stessa rispetto a tutti i 24 ellissoidi delle due bisestuple.

Superficie del 4° ordine dotate di 12 punti doppî.

Teorema LIX. Le 6 rette h e le 16 rette h', sono nel medesimo tempo base di un fascio di superficie del 4° ordine e inviluppo di una schiera di superficie della 4^a classe. A questi due fasci e a queste due schiere appartengono rispettivamente le due terne di tetraedri della sestupla fondamentale.

Teorema LX. I piani polari di un punto rispetto ai tre tetraedri di una terna s' incontrano in una retta R, come anche quelli rispetto all'altra terna s' incontrano in una retta R_1.

Teorema LXI. Per un piano i tre poli rispetto ai tre tetraedri di una terna sono pure situati in una retta.

Teorema LXII. Mentre la retta R è la retta d' intersezione dei piani polari di un punto P rispetto ai tetraedri per es. della 1^a terna, la R contiene i 3 punti coniugati di P rispetto ai tetraedri della 2^a terna. Analogamente di un piano p la retta ove sono situati i suoi tre poli rispetto ai tetraedri della 1^a terna è la retta d' intersezione dei suoi tre piani coniugati rispetto ai tetraedri della 2^a terna.

Teorema LXIII. Se di un punto P si costruisce il piano polare p rispetto ad S, al punto P corrispondono due rette R R_1 ed al piano p le rette R_1 R rispetto alle 2 terne di tetraedri. Le rette R R_1 sono coniugate rispetto ad S, i 6 punti coniugati di P e i piani coniugati di P rispetto ai 6 tetraedri della sestupla sono rispettivamente poli e piani polari rispetto alla S.

Teorema LXIV. Le superficie di 4° ordine di uno dei fasci del *Teorema LX* hanno 12 punti doppî comuni, che si separano in tre tetraedri, i cui piani opposti contengono 4 rette delle superficie. L'equazione di questo fascio di superficie riferito ad uno dei tetraedri di punti doppî è della forma

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2 + \lambda (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) - (\lambda + 1) x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 = 0$$

Esso nella trasformazione $x_i^2 = \mu x'_i$ si trasforma in un fascio di coni che passano per i quattro vertici del tetraedro di riferimento, talmentechè ad una retta di uno dei coni, corrisponde una curva del 4° ordine passante per gli altri 8 punti doppî, situata sulla superficie corrispondente del fascio, ai due fasci proiettivi di piani che generano un cono corrispondono due fasci proiettivi di superficie di 2° ordine, che generano una delle superficie del 4° ordine. Ad un piano toccante il cono corrisponde una superficie di 2° grado toccante la superficie di 4° ordine ecc. Le superficie del fascio si trasformano in sè medesime facendo

$$x_i = \frac{1}{x'_i}$$

ad una retta che tocca la superficie corrisponde una cubica gobba, che passa per i vertici del tetraedro di riferimento e tocca la superficie. E questo per i tre tetraedri dei punti doppî.

Teorema LXV. I 16 iperboloidi H incontrano una delle superficie del fascio in 6 rette h e in una conica. I piani delle 16 coniche formano una configurazione speciale di Kummer, essi passano rispettivamente per le rette h, uno qualunque di essi incontra ulteriormente la superficie del fascio che si considera, in un' altra retta, che cade nella retta h situata in esso.

Teorema LXVI. Ci sono due superficie speciali immaginarie nel fascio, che contengono 8 delle rette h_0 *Teorema XXXIV.* A queste rette nella trasformazione $x_i = \frac{1}{x'_i}$ corrispondono $3.8 = 24$ cubiche gobbe situate sulla superficie.

Applicazione della figura nel piano.

Teorema LXVII. Un piano qualunque taglia la figura dei sei tetraedri di una sestupla in due terne di quadrilateri, i lati di due di essi s'incontrano due a due nei lati del terzo. Le rette h vengono incontrate in 16 punti, 4 a 4 situati in 12 rette, che passano due a due per uno qualunque dei vertici dei tre quadrilateri (A) (B) (C) della prima terna. Analogamente per le rette h'. I 16 punti d' incontro con le rette h, sono situati 6 a 6 in 16 coniche H. Due coppie di vertici opposti di due quadrilateri di una terna sono situati in una conica, che ha il terzo quadrilatero come polare, cioè tale che i vertici opposti sono coniugati rispetto alla conica. Siccome le 4 coppie di vertici opposti situati sulla conica sono anche coppie di vertici opposti di due quadrilateri della 2ª terna, così la conica ha per quadrilatero polare anche il terzo quadrilatero della 2ª terna. C' è una conica immaginaria S nel piano che ha i 6 quadrilateri come polari. Data una conica qualunque ed un suo quadrilatero polare, questo dà luogo ad una sola sestupla di quadrilateri, che sono polari rispetto alla conica.

Questa è la figura identica a quella da me studiata nella mia Memoria sull'*Hexagrammum* p. 33 e la correlativa a p. 44. Essa risulta anche dal *Teorema III* di questa Nota.

Teorema LXVIII. Due dei tre quadrilateri della 1ª terna nella figura 2 p. 33 della Memoria dell'*Hexagrammum* hanno 6 punti di Kirkman per vertici e 4 rette di Pascal per lati, e il terzo è formato dal triangolo Δ comune a due figure π e dalla retta di Steiner-Plücker di queste due figure. I vertici degli altri tre quadrilateri sono gli stessi, i lati sono le 6 rette v_{12} e le 6 rette m. I 16 punti d'intersezione con le rette h, sono rappresentati dai 12 punti P del lato Δ e dai 4 punti di Steiner della retta di Steiner-Plücker. I 16 punti d'incontro con le 16 rette h' sono i 4 punti Z e i 12 punti T. Dunque i punti P e i punti di Steiner della figura sono situati 6 a 6 in 16 coniche, di queste in tutto il sistema dell'*Hexagrammum* ce ne sono 240. Analogamente per i punti Z e T. I 12 punti di Kirkman della figura sono situati 8 ad 8 in tre coniche, che hanno il quadrilatero formato dal triangolo Δ e dalla retta di Steiner e Plücker come polare. Di queste coniche nell'*Hexagrammum* ce ne sono 45. C'è una conica immaginaria S, che ha i 6 quadrilateri come polari, per la quale le coppie di punti di Kirkman che sono coppie di vertici opposti dei due primi quadrilateri della 1ª terna sono coniugati. Di queste ce ne sono 15 in tutto l'*Hexagrammum*. Rispetto a questa conica S i 12 punti P del triangolo Δ e i 4 punti di Steiner, sono coniugati ai 16 punti Z e T.

Analoghi teoremi si possono trovare con la figura correlativa di questa applicandola alla figura a p. 44 della mia citata Memoria, si ottengono nuovi teoremi perchè in questa figura gli elementi dell'*Hexagrammum* sono molto diversi da quelli della prima.

Il Socio Govi legge una sua Memoria intorno a un discorso inedito pronunciato da Federico Cesi, fondatore dell'Accademia dei Lincei, il 26 gennaio del 1616, e da essere intitolato: *Del natural desiderio di sapere, e instituzione de'Lincei per adempimento di esso.*

Il Socio Struever presenta la seguente Nota del prof. G. Uzielli, *Sopra alcune osservazioni del sig. Klocke sulle strie di dissoluzione dell'allume di cromo.*

« Il sig. Klocke nel dar notizia [1] di varie osservazioni cristallogeniche intorno all'allume di cromo fatte dal sig. Lecoq de Boisbaudran [2] e da me [3], sembra credere che io attribuisca le strie che si formano, quando un cristallo è posto in una soluzione non satura, a un fenomeno di emiedria.

« Io credo che il prof. Klocke non ha avuto occasione di vedere la mia Nota

(1) Klocke (in) *Neues Jahrbuch für Mineralogie* ecc. 1879 p. 887-890.

(2) Lecoq de Boisbaudran, *Sur les formes hémiédriques des Aluns*. Bull. de la Soc. Minéralogique de France vol. II. (1879) n. 2, p. 41.

(3) Uzielli G., *Sulle strie di dissoluzione dell'Allume di Cromo.* Atti dell'Accademia dei Lincei vol. I. 1877 ser. 3ª. Transunti.